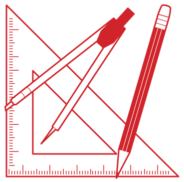
Matemática Multimídia

NÚMEROS
E FUNÇÕES

GUIA DO PROFESSOR



Experimento

Mágica das cartelas

Objetivos da unidade

1. Relembrar diferentes sistemas de numeração;
2. Aprofundar o estudo sobre a base binária;
3. Conhecer aplicações da base binária e da hexadecimal.

UNICAMP

FNDE FUNDO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO DA EDUCAÇÃO

Secretaria de Educação a Distância

Ministério da Ciência e Tecnologia

Ministério da Educação

Governo Federal

Mágica das cartelas

Guia do professor

Sinopse
Nesse experimento os alunos tentarão desvendar um truque de mágica e, para isso, terão que usar o sistema binário de numeração. Esse sistema é o formato utilizado por microprocessadores para armazenar e processar alguns tipos de informação, como um texto, por exemplo. No Fechamento a turma terá uma boa noção da relação entre esses tópicos, sistema binário e armazenamento de informação, aparentemente não relacionados.

Conteúdos

- Sistemas de numeração, Bases numéricas;
- Base Binária;
- Divisibilidade.

Objetivos

1. Relembrar diferentes sistemas de numeração;
2. Aprofundar o estudo sobre a base binária;
3. Conhecer aplicações da base binária e da hexadecimal.

Duração
Uma aula simples.

Material relacionado
Vídeo: O Mágico da Arábias, Hits dos bits;

Matemática Multimídia

Introdução

Acredita-se que a necessidade de contar objetos surgiu assim que os seres humanos passaram a viver em sociedade. A contagem era feita a partir da associação de objetos pequenos, como contas, com os itens que se desejava contar. Imagina-se também que os números tenham sido o primeiro registro escrito feito pelo homem.

Vários povos inventaram, independentemente, suas próprias formas de contar e de representar valores. Tem-se registro de vários sistemas numéricos diferentes, como dos babilônios, egípcios e gregos. E, esses sistemas, utilizavam bases diferentes.

O sistema de numeração decimal que usamos no nosso dia a dia está tão fortemente estabelecido que, dificilmente, pensamos em suas características, em suas facilidades ou até mesmo em suas limitações.

Para formar um sistema de numeração é preciso um conjunto de símbolos, chamados de *algarismos*, e um conjunto de regras que determinam como esses símbolos devem ser manipulados. A função básica de um sistema de numeração é a contagem. Por isso, podemos imaginar que os primeiros sistemas inventados se preocuparam, quase que exclusivamente, com a representação dos números naturais. Neste guia veremos a representação em outras bases, além da decimal e da binária, já analisada com bastante cuidado no roteiro do Experimento.

Para saber mais sobre tópicos relacionados, um ótimo título é *Introdução à história da matemática*, de Howard Eves (tradução de Higyno Domingues). O primeiro capítulo trata especificamente de sistemas de numeração e, a partir daí, seguem-se cronologicamente os acontecimentos, as descobertas e as curiosidades da trajetória da Matemática na humanidade.

Motivação

Atualmente existe uma enorme utilização do sistema decimal de numeração, seja para falar, seja para representar quantidades. Porém, o que não é muito conhecido é o papel fundamental do sistema binário em nossas vidas. Esse sistema é a base para o modo de armazenamento e processamento de informações nos computadores.

Os principais conteúdos para a compreensão desses conceitos são tipicamente do Ensino Fundamental, porém entendemos que seu largo uso na área de computação justifica a retomada do tema.

Além disso, o conhecimento da escrita de números em diversas bases permite maior domínio e compreensão dos algoritmos das operações básicas.

O experimento

Etapa 1 **A mágica**

O ideal para a realização do experimento é levar as cartelas prontas para os alunos, já que sua confecção gasta muito tempo e pode dar dicas sobre o mistério da mágica. Além disso, certifique-se de que apenas um dos membros de cada grupo leia, inicialmente, as instruções da Folha do Aluno.

A execução da mágica é bastante simples; acreditamos que os estudantes não terão dificuldades nesse primeiro contato.

Etapa 2 **Qual é o truque?**

Por que a mágica funciona?
Os grupos devem discutir bastante na busca da explicação para o truque. É provável que apareçam explicações corretas mas sem a utilização da base binária. Na tabela abaixo, também presente na Folha do Aluno, os estudantes deverão escrever as somas obtidas, porém nada garante que eles utilizarão potências de 2 para representar os valores.

Valor escolhido	Soma dos números iniciais das cartelas selecionadas
56	$8+16+32=2^3+2^4+2^5$
39	$1+2+4+32=2^0+2^1+2^2+2^5$
15	$1+2+4+8=2^0+2^1+2^2+2^3$
9	$1+8=2^0+2^3$

TABELA 1 *Idêntica na Folha do Aluno.*

Note que a explicação que usa simplesmente os números iniciais das cartelas está correta, mas não explica o porquê disso ser possível, isto é, que qualquer valor pode ser expresso como uma soma de quantidades que são potências de 2. Então, caso isso ocorra, sugira uma outra forma de escrita e explique que o sistema binário é a razão pela qual todos os números inteiros podem ser escritos como potências de base 2, bem como base 3 ou base 4, e assim por diante. Discutiremos outras bases no Fechamento deste Guia.

Etapa 3 **Outras questões**

A primeira questão desta etapa do experimento é numérica e serve para que os alunos comecem a pensar na forma como as cartelas são construídas. A segunda questão busca uma generalização da anterior, são elas:

Questão para os alunos

- Como ficariam as cartelas se quiséssemos que os valores de adivinhação possíveis se estendessem até 100?
- Qual é a relação entre a quantidade de cartelas e o valor máximo que elas apresentam?

Note que os alunos podem obter a maior potência de 2 na decomposição da valor que se deseja obter nas cartelas, e esse será o valor inicial da última cartela que deve ser confeccionada. Assim, é possível fazer a generalização, já exposta no experimento:

Conclusão importante

Se a maior potência de 2 das cartelas é 2^n, então teremos $n+1$ cartelas e o maior valor que ela irá apresentar é $2^{n+1}-1$.

Fechamento

O fechamento do Experimento apresenta um método para obtenção da representação na base binária de um valor originalmente na base decimal. Neste Guia, vamos analisar o caso geral para conversão entre duas bases quaisquer. Lembre-se de que, para bases maiores que 10, o usual é usar as letras em ordem alfabética para os símbolos que necessitarem de dois dígitos, ou seja, A = dez, B = onze, C = doze, e assim por diante. A notação para um valor qualquer N na base b que usaremos nesse texto será $(N)_b$.

Da base b para base 10
A conversão de números em uma base b qualquer para a base 10 é simples, pois precisamos apenas nos lembrar da representação geral de $(N)_b$, ou seja:

$$
\begin{aligned}
(N)_b = {} & a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \ldots + \\
& + a_2 b^2 + a_1 b^1 + a_0 b^0 + a_{-1} b^{-1} + a_{-2} b^{-2} + \ldots + \\
& + a_{-m} b^{-m}
\end{aligned}
$$

Note que o valor não precisa ficar restrito aos inteiros: podemos representar a parte inteira de $(N)_b$ por

$$a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \ldots + a_2 b^2 + a_1 b^1 + a_0 b^0$$

e a parte fracionária por

$$a_{-1} b^{-1} + a_{-2} b^{-2} + \ldots + a_{-n} b^{-n},$$

com $0 \leqslant a_i < b$ para todo $a_1 \in \mathbb{N}$.

Observação

Observe que não existe razão para nos restringir aos números naturais.

Como exemplo, vamos transformar o número $(345,23)_6$ (na base 6) para a base 10:

$$
\begin{aligned}
(345,23)_6 &= 3 \times 6^2 + 4 \times 6^1 + 5 \times 6^0 + 2 \times 6^{-1} + 3 \times 6^{-2} \\
(345,23)_6 &= 3 \times 36 + 4 \times 6 + 5 \times 1 + 2 \times \tfrac{1}{6} + 3 \times \tfrac{1}{36} \\
(345,23)_6 &= 137 + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{12} \\
(345,23)_6 &= 137 + \tfrac{5}{12}
\end{aligned}
$$

É interessante notar que as representações decimais podem mudar quando alteramos a base. No exemplo acima, $(345,23)_6$ apresenta uma representação decimal finita, enquanto que $(137 + \frac{5}{12})_{10} = (137,41\overline{6})_{10}$ é uma dízima periódica.

Da base 10 para a base b

Para apresentar esse processo, vamos separá-lo em duas etapas. Consideraremos que N pode ser um racional e, assim, teremos:

Parte Inteira

O número que representa a parte inteira de N será dividido sucessivas vezes pela base b. O resto de cada divisão ocupará sucessivamente as posições de ordem 0, 1, 2 e assim por diante, até que o resto da última divisão (que resulta em quociente zero) ocupe a posição de mais alta ordem.

No Experimento, apresentamos dois exemplos desse procedimento para base $b = 2$.

Parte Fracionária

O algoritmo para a parte fracionária consiste de uma série de multiplicações sucessivas do número fracionário a ser convertido pela base. A parte inteira do resultado da primeira multiplicação será o valor da primeira casa fracionária, e a parte fracionária será de novo multiplicada pela base e assim por diante, até o resultado dar zero ou até encontrarmos o número de casas decimais desejado.

Exemplo

Vamos converter $N = 15,35$ para $b = 3$, com 5 algarismos fracionários:

Para a parte inteira, temos:

$$
\begin{aligned}
15 &= (3 \times 5) \\
&= (3 \times ((3 \times 1) + 2)) \qquad \text{, ou seja, } (15)_{10} = (120)_3 \\
&= (1 \times 3^2 + 2 \times 3^1 + 0 \times 3^0)
\end{aligned}
$$

Para a parte fracionária, temos:

- $0,35 \times 3 = 1,05$. Assim, 1 será o primeiro algarismo da parte fracionária de $(N)_3$;
- $0,05 \times 3 = 0,15$. Assim, 0 será o segundo algarismo da parte fracionária de $(N)_3$;
- $0,15 \times 3 = 0,45$. Assim, 0 será o terceiro algarismo da parte fracionária de $(N)_3$;

- $0,45 \times 3 = 1,35$. Assim, 1 será o quarto algarismo da parte fracionária de $(N)_3$;
- $0,35 \times 3 = 1,05$. Assim, 1 será o quinto algarismo da parte fracionária de $(N)_3$.

Note que os valores começaram a se repetir, indicando uma dízima com período 1001.

Dessa forma, obtemos $(15,35)_{10} = (120,\overline{1001})_3$.

Variações

Já que a base binária tem especial importância atualmente por ser a base utilizada pelos computadores para armazenar informação, uma possibilidade de continuidade ao conteúdo proposto neste experimento é explorar a base hexadecimal (16). Essa base usa os algarismos **0**, **1**, **2**, **3**, **4**, **5**, **6**, **7**, **8**, **9**, **A**, **B**, **C**, **D**, **E** e **F** para representar cores. Por exemplo, o vermelho é representado por #**FF0000** e o azul celeste por #**87CEEB**.

É possível encontrar mais informações sobre essa base no Guia do Professor do vídeo Hit dos Bits, no portal www.m3.mat.br.

Bibliografia

MANO, Rui. **Sistemas de numeração**. Rio de Janeiro, 2007. Disponível em *http://wwwusers.rdc.puc-rio.br/rmano/sn2cvb.html*. Acesso em 13 de setembro de 2010.

Secretaria de Educação Básica. **O adivinho indiscreto: Explorando o ensino da Matemática**, atividades. São Paulo, v.2, p.81 – 82, 2000. Disponível em *http://www.dominiopublico.gov.br*. Acesso em 30 de agosto de 2010.

Ficha técnica

Matemática Multimídia

Autora
Rita Santos Guimarães

Revisores
Matemática
Antônio Carlos do Patrocinio
Língua Portuguesa
Carolina Bonturi
Pedagogia
Ângela Soligo

Projeto gráfico
Preface Design

UNICAMP

Universidade Estadual de Campinas
Reitor
Fernando Ferreira da Costa
Vice-Reitor e Pró-Reitor de Pós-Graduação
Edgar Salvadori De Decca

Matemática Multimídia
Coordenador Geral
Samuel Rocha de Oliveira
Coordenador de Experimentos
Leonardo Barichello

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica (IMECC – UNICAMP)
Diretor
Jayme Vaz Jr.
Vice-Diretor
Edmundo Capelas de Oliveira

FNDE FUNDO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO DA EDUCAÇÃO

Secretaria de Educação a Distância

Ministério da Ciência e Tecnologia

Ministério da Educação

Governo Federal