Matemática Multimídia

NÚMEROS
E FUNÇÕES

O EXPERIMENTO

Experimento

Mágica das cartelas

Objetivos da unidade

1. Relembrar diferentes sistemas de numeração;
2. Aprofundar o estudo sobre a base binária;
3. Conhecer aplicações da base binária e da hexadecimal.

UNICAMP

FNDE FUNDO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO DA EDUCAÇÃO

Secretaria de Educação a Distância

Ministério da Ciência e Tecnologia

Ministério da Educação

Governo Federal

Mágica das cartelas

O experimento

Sinopse

Nesse experimento os alunos tentarão desvendar um truque de mágica e, para isso, terão que usar o sistema binário de numeração. Esse sistema é o formato utilizado por microprocessadores para armazenar e processar alguns tipos de informação, como um texto, por exemplo. No Fechamento a turma terá uma boa noção da relação entre esses tópicos, sistema binário e armazenamento de informação, aparentemente não relacionados.

Conteúdos

- Sistemas de numeração, Bases numéricas;
- Base Binária;
- Divisibilidade.

Objetivos

1. Relembrar diferentes sistemas de numeração;
2. Aprofundar o estudo sobre a base binária;
3. Conhecer aplicações da base binária e da hexadecimal.

Duração

Uma aula simples.

Material relacionado

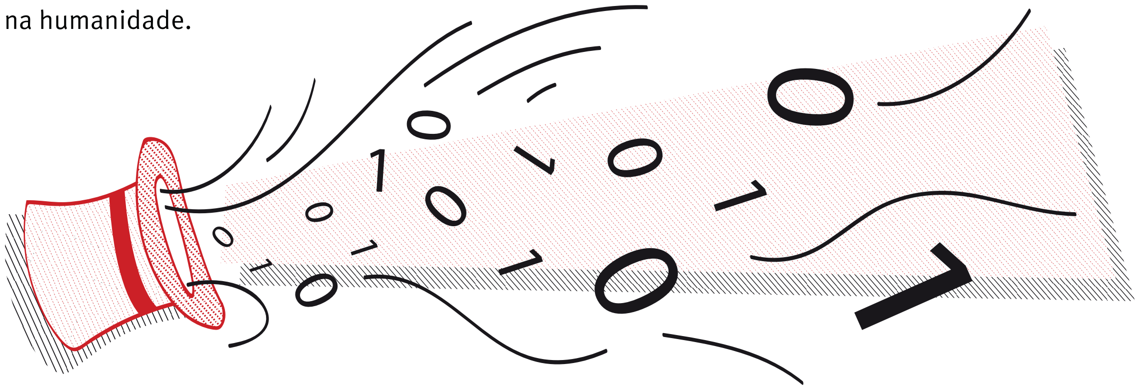
Vídeo: O Mágico da Arábias, Hits dos bits;

Matemática Multimídia

Introdução

Acredita-se que a necessidade de contar objetos surgiu a partir do momento que os seres humanos passaram a viver em sociedade. A contagem era feita a partir da associação de objetos pequenos, como cunhas, com os itens que se desejava contar. Imagina-se que a abstração numérica por meio de símbolos tenha sido o primeiro registro escrito feito pelo homem.

Vários povos inventaram, independentemente, suas próprias formas de contar e de representar valores. Há registro de vários sistemas numéricos diferentes, como o dos babilônios, egípcios e gregos. Para saber mais sobre tópicos relacionados, um ótimo título é Introdução à história da matemática, de Howard Eves, tradução de Higyno Domingues: o primeiro capítulo trata especificamente de sistemas de numeração e a partir daí seguem, cronologicamente, os acontecimentos, as descobertas e as curiosidades da trajetória da Matemática na humanidade.



Atualmente existe uma enorme utilização do sistema decimal de numeração, seja na hora de falar, seja para representar quantidades, porém, o que não é muito conhecido é o papel fundamental do sistema binário em nossas vidas. Esse sistema é a base para o modo de armazenamento e processamento de informações nos computadores.

Os principais conteúdos para a compreensão desses conceitos são tipicamente do Ensino Fundamental, porém acreditamos que seu largo uso na área de computação justifica a retomada do tema.

Este experimento faz essa recordação de conteúdo através de uma mágica com cartelas que será apresentada aos alunos e o desafio será entender como a mágica funciona. No Fechamento fixaremos o foco nessa aplicação do sistema binário.

O Experimento

Material necessário

- Lápis;
- Borracha;
- Folhas de papel A4 (*Cartelas do anexo do experimento*).

A mágica

ETAPA
1

Divida os alunos em trios e distribua um conjunto de cartelas para cada grupo (sugerimos as cinco do anexo). Caso os grupos tenham que confeccioná-las, não esclareça a regra que determina a formação de cada uma delas, pois esta é a solução do EXPERIMENTO.

Peça para que cada grupo escolha um integrante para ser o mágico e entregue para este estudante a FOLHA DO ALUNO. Os outros não devem ler as instruções nessa primeira etapa.

O mágico deve realizar o número com os outros dois componentes, seguindo as instruções:

1. Peça para que um de seus colegas escolha um número entre 1 e 63;
2. A seguir, solicite que ele separe as cartelas em que o valor escolhido está presente, sem revelar tal número;
3. Com as cartelas selecionadas em mãos, some o primeiro número que aparece em cada uma delas;
4. Revele para seu colega o valor dessa soma como sendo o valor que ele escolheu inicialmente;
5. Repita a mágica quantas vezes quiser; fique tranquilo, ela sempre funciona!

Por exemplo:

Se o número 39 for escolhido, o mágico receberá as cartelas a seguir.

1	3	5	7	9	11
13	15	17	19	21	23
25	27	29	31	33	35
37	39	41	43	45	47
49	51	53	55	57	59
61	63				

2	3	6	7	10	11
14	15	18	19	22	23
26	27	30	31	34	35
38	39	42	43	46	47
50	51	54	55	58	59
62	63				

4	5	6	7	12	13
14	15	20	21	22	23
28	29	30	31	36	37
38	39	44	45	46	47
52	53	54	55	60	61
62	63				

8	9	10	11	12	13
14	15	24	25	26	27
28	29	30	31	40	41
42	43	44	45	46	47
56	57	58	59	60	61
62	63				

16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27
28	29	30	31	48	49
50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60	61
62	63				

32	33	34	35	36	37
38	39	40	41	42	43
44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60	61
62	63				

FIG. 1

Somando os primeiros números de cada cartela (1, 2, 4 e 32), o mágico irá obter o número escolhido, 39.

Qual é o truque?

ETAPA 2

Por que a mágica funciona?
O mágico deve explicar para os outros componentes do grupo como ele descobre o número escolhido. E então o grupo deve discutir para tentar explicar por que esse procedimento funciona.

Esperamos que os alunos notem que a primeira célula de cada cartela é uma potência de 2. Os outros valores que compõem cada cartela são aqueles que apresentam, em sua representação binária, a mesma potência de 2 que aparece na sua primeira célula.

Sugira que os grupos escrevam na tabela da Folha do Aluno as somas realizadas durante o truque para buscar informações que desvendem o mistério. Por exemplo:

Valor escolhido	Soma dos números iniciais das cartelas selecionadas
56	$8+16+32=2^3+2^4+2^5$
39	$1+2+4+32=2^0+2^1+2^2+2^5$
15	$1+2+4+8=2^0+2^1+2^2+2^3$
9	$1+8=2^0+2^3$

TABELA 1 *Idêntica na* FOLHA DO ALUNO.

* *Se os grupos apresentarem muitas dificuldades, dê dicas que possam levá-los à solução do mistério.*

Os grupos devem formular hipóteses sobre a explicação da mágica. Essas hipóteses podem ser apresentadas para a turma e uma discussão decide as que são válidas e as que não são. Por fim, introduza a notação da solução da mágica com potências 2 caso os grupos ainda não o tenham feito.

A próxima etapa do experimento é opcional. Nela, sugerimos outras questões envolvendo as cartelas e o conteúdo sobre base binária.

O vídeo *Mágico das arábias*, disponível no portal do projeto M³, www.m3.mat.br, apresenta e resolve dois truques interessantes. O primeiro deles é a mesma mágica apresentada neste experimento, porém, o mágico usa cartelas menores, com apenas nove valores em cada uma delas. As explicações do vídeo são curtas e sucintas, então pode ser proveitoso utilizá-lo em aula.

Outras questões

ETAPA 3

Professor, nesta etapa vamos sugerir duas questões adicionais que podem dar continuidade às investigações usando as cartelas. Essas perguntas não estão na Folha do Aluno, pois preferimos deixá-las como opcionais.

Questão para os alunos

Como ficariam as cartelas se quiséssemos que os valores de adivinhação possíveis se estendessem até 100?

A ilustração a seguir indica como ficariam as cartelas se fossem usados valores de 1 até 100.

1	3	5	7	9	11	13
15	17	19	21	23	25	27
29	31	33	35	37	39	41
43	45	47	49	51	53	55
57	59	61	63	65	67	69
71	73	75	77	79	81	83
85	87	89	91	93	95	97
99						

2	3	6	7	10	11	14
15	18	19	22	23	26	27
30	31	34	35	38	39	42
43	46	47	50	51	54	55
58	59	62	63	66	67	70
71	74	75	78	79	82	83
86	87	90	91	94	95	98
99						

4	5	6	7	12	13	14
15	20	21	22	23	28	29
30	31	36	37	38	39	44
45	46	47	52	53	54	55
60	61	62	63	68	69	70
71	76	77	78	79	84	85
86	87	92	93	94	95	100

8	9	10	11	12	13	14
15	24	25	26	27	28	29
30	31	40	41	42	43	44
45	46	47	56	57	58	59
60	61	62	63	72	73	74
75	76	77	78	79	88	89
90	91	92	93	94	95	

16	17	18	19	20	21	22
23	24	25	26	27	28	29
30	31	48	49	50	51	52
53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	80	81	82
83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	

32	33	34	35	36	37	38
39	40	41	42	43	44	45
46	47	48	49	50	51	52
53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	96	97	98
99	100					

64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77
78	79	80	81	82	83	84
85	86	87	88	89	90	91
92	93	94	95	96	97	98
99	100					

FIG. 2

Questão para os alunos

Qual é a relação entre a quantidade de cartelas e o valor máximo que elas apresentam?

Note que para cada expoente das potências de 2 é necessário uma cartela. Considerando que a última cartela terá como primeiro valor a potência 2^n, então teremos $n+1$ cartelas, iniciadas com 2^0, 2^1, 2^2, ..., 2^{n-1}, 2^n e, para escrever o máximo de valores sem atingir a potência seguinte, podemos escrever até o número $2^{n+1}-1$.

Fechamento

O Fechamento deste experimento trata de algumas questões envolvendo a base binária. Inicialmente vamos mostrar um algoritmo para obter a representação de qualquer valor na base binária e a seguir apresentaremos a utilização mais importante desse sistema: o armazenamento de informações em computadores. Para que essas explicações sejam aproveitadas por todos na classe, certifique-se de que todos os grupos já compreenderam o porquê de o procedimento da mágica funcionar.

Como escrever um número na base binária?
Os grupos podem assimilar todo o procedimento apresentado na mágica sem conhecer a base binária. Comente, então, com a turma sobre nosso sistema de numeração, o decimal, que utiliza apenas 10 algarismos para representar qualquer valor inteiro positivo e, na escrita desses valores, a posição que cada algarismos ocupa no número altera seu valor, ou seja:

Para mais informações sobre sistemas de numeração, consulte o Guia do Professor.

$$1498 = 1000 + 400 + 90 + 8 = 1 \times 10^3 + 4 \times 10^2 + 9 \times 10^1 + 8 \times 10^0$$

$$9841 = 9000 + 800 + 40 + 1 = 9 \times 10^3 + 8 \times 10^2 + 4 \times 10^1 + 1 \times 10^0$$

No sistema binário os algarismos são apenas zeros e uns, mas a formação permanece a mesma. Por exemplo:

$$1101 = 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0$$

este valor é 13 na base dez.

Assim, questione seus alunos:

Questão para os alunos

Como converter um número na base decimal para a base binária?

Para converter um número da base decimal para a base binária, basta realizar divisões sucessivas por 2; os restos dessa divisão fornecerão os algarismos do número na nova base. Por exemplo, vamos converter 75 na base decimal (escreve-se $(75)_{10}$) para base binária:

$$^{75}/_2 = 37 \text{ resto } 1$$

$$^{37}/_2 = 18 \text{ resto } 1$$

$$^{18}/_2 = 9 \text{ resto } 0$$

$$^{9}/_2 = 4 \text{ resto } 1$$

$$^{4}/_2 = 2 \text{ resto } 0$$

$$^{2}/_2 = 1 \text{ resto } 0$$

$$^{1}/_2 = 0 \text{ resto } 1$$

Portanto, $(75)_{10} = (1001011)_2$.

Este procedimento fornece a decomposição do valor na base decimal para a base binária. Observe os cálculos escritos na forma de divisão euclidiana por 2:

$$75 = 2 \times 37 + 1$$

$$75 = 2 \times (2 \times 18 + 1) + 1$$

$$75 = 2 \times (2 \times (2 \times 9) + 1) + 1$$

$$75 = 2 \times (2 \times (2 \times (2 \times 4 + 1)) + 1) + 1$$

$$75 = 2 \times (2 \times (2 \times (2 \times (2 \times 2) + 1)) + 1) + 1$$

Note que, a cada passo, dividimos o quociente do passo anterior por 2. Agora, vamos escrever as potências de 2 e fazer a distributiva das multiplicação obtidas:

$75 = 2 \times (2 \times (2 \times (2 \times 2^2 + 1)) + 1) + 1$

$75 = 2 \times (2 \times (2 \times (2^3 + 1)) + 1) + 1$

$75 = 2 \times (2 \times (2^4 + 2) + 1) + 1$

$75 = 2 \times (2^5 + 2^2 + 1) + 1$

$75 = 2^6 + 2^3 + 2 + 1$

$75 = 2^6 + 2^3 + 2^1 + 2^0$

$(75)_{10} = (1001011)_2$

Eis um outro exemplo, com o número $(44)_{10}$:

$^{44}/_2 = 22$ resto 0

$^{22}/_2 = 11$ resto 0

$^{11}/_2 = 5$ resto 1

$^{5}/_2 = 2$ resto 1

$^{2}/_2 = 1$ resto 0

$^{1}/_2 = 0$ resto 1

$(44)_{10} = (101100)_2$

Por que escrever um número na base binária?
No início da informática, o armazenamento de informação acontecia graça aos transistores, que eram capazes de gravar apenas dois estados. Essa mesma lógica é utilizada nos microprocessadores atuais, e esses dois estados possíveis podem ser associados a, por exemplo, ligado ou desligado, verdadeiro ou falso, sim ou não, e, para uma melhor representação, 0 ou 1. Conhecendo essa forma de armazenar dados, pergunte para a turma:

Questão para os alunos

Como a base binária auxilia no armazenamento de informações?

Quando a informação se resume a números, parece simples a representação com zeros e uns, pois basta usar a base binária. Porém, se considerarmos que toda a informação no computador é armazenada de maneira sequencial, sem “espaços” para separá-las, surge uma certa ambiguidade. Por exemplo, a informação 11101 pode ser interpretada de mais de uma maneira:

- $(11101)_2 = 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^0 = 29$ ou
- $(11)_2(101)_2$ representando o número 3 e o número 5 ou
- $(1)_2(1101)_2$ representando o número 1 e o número 13.

Assim, é preciso estabelecer um tamanho, ou seja, uma quantidade de símbolos, para que fiquem definidos o início e o final de cada informação. Imaginando a necessidade de representar todo o alfabeto, sinais de pontuação etc escolheu-se o tamanho oito. Note que com oito dígitos binários é possível escrever 2^8 informações diferentes. Por exemplo, a sequência $00011101000110101100110000011000$ tem quatro informações, são elas: 00011101 / 00011010 / 11001100 / 00011000. Cada um desses conjuntos de oito dígitos é chamado de palavra e cada um dos dígitos é chamado de bit.

Porém, com a disseminação da tecnologia e a necessidade de representar muitos outros símbolos (vários alfabetos distintos, por exemplo), os $2^8 = 256$ caracteres não foram mais suficientes. Assim, começaram a surgir sistemas que usam palavras maiores. Um sistema recente que pretende padronizar essa codificação é o UTF-8 (Unicode Transformation Format) que usa um comprimento variável, indo de 1 até 4 bytes (32 bits). Nesse formato, qualquer caractere universal pode ser representado.

Esses mesmos bits aparecem na unidade que mede a velocidade de conexão (ou de transmissão de informações) da internet.

***A unidade* kbps**

Representa a quantidade de bits transmitidos por segundo.

Por exemplo, uma conexão de 512 kbps troca 512 kbits por segundo. Isso significa 512×1024 bits de informação por segundo. Se considerarmos a maior palavra em UTF-8 (32 bits), temos um total de 16384 informações chegando a cada segundo no computador. Porém, devemos imaginar ainda que toda informação transmitida atualmente é compactada antes de ser enviada, sendo assim, esse valor, considerando símbolos em um texto, é ainda maior.

O vídeo “Hit dos bits”, disponível no portal do projeto M³, www.m3.mat.br, exibe os esclarecimentos sobre o sistema binário e a forma de armazenamento de informações de forma bastante semelhante a este texto e, assim, pode ser uma boa alternativa às explicações na lousa.

Ficha técnica

Matemática Multimídia

Autora
Rita Santos Guimarães

Coordenação de redação
Leonardo Barichello

Redação
Rita Santos Guimarães

Revisores
Matemática
Antônio Carlos do Patrocinio
Língua Portuguesa
Carolina Bonturi
Pedagogia
Ângela Soligo

Projeto gráfico
Preface Design

Ilustrador
Lucas Ogasawara de Oliveira

UNICAMP

Universidade Estadual de Campinas
Reitor
Fernando Ferreira da Costa
Vice-Reitor e Pró-Reitor de Pós-Graduação
Edgar Salvadori De Decca

Matemática Multimídia
Coordenador Geral
Samuel Rocha de Oliveira
Coordenador de Experimentos
Leonardo Barichello

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica (IMECC – UNICAMP)
Diretor
Jayme Vaz Jr.
Vice-Diretor
Edmundo Capelas de Oliveira

FNDE FUNDO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO DA EDUCAÇÃO

Secretaria de Educação a Distância

Ministério da Ciência e Tecnologia

Ministério da Educação

Governo Federal